線性代數

吾輩昔由具象而習線性代數、如解聯立方程、矩陣之運算之屬. 茲章將述**線性空間**之義: 此乃向量與矩陣之抽象也. 或將問曰:「何為必學斯抽象之物?」試觀下例自明其故.

中學已識**向量**: 如位移、速度、力等. 初視向量、多作二三分量、表平面或空間之一點. 及習線性代數、乃知如 $(1,2,3,4,5)$ 亦可名向量、雖其**形象**難以具現耳.

夫自舊義之向量而遷於任意多分量者、抽象也; 抽象既成、能所及者廣、而形象或失. 此講將更進一層、復抽其義、以得諸類共相之性.

先追憶自 $\mathbb{R}^3$ 抽而至 $\mathbb{R}^n$ 之程. 今將以較嚴正之辭、為爾熟其代數之構.

記 (a,b,c,d) 者、向量乎? 非也. 此不過**元組**、即有序之有限列而已 (亦可由有序對構之). 人多習以為向量、蓋因其上可自然而定**加法**與**數乘**耳; 惟有元組之形而未立運算、則無所作為. 譬如以 Python 行 `(1, 2, 3) + (1, 2, 3)`、其返 `(1, 2, 3, 1, 2, 3)`; 而紙上書 $(1,2,3)+(4,5,6)$、讀者自以為 $(1+4, 2+5, 3+6)$. 此以編程語言中符號 + 乃接續之義、而座標空間則逐個相加也. 是知用符號、宜先明其義; 弗然、易致紛紜. 故曰: **元組非向量; 惟於其上立向量之構、然後可名向量**.

1 向量之用

還論向量. 力可分解為兩互正交之分量、用以析力學題、此皆以力為向量故也. 同理、正弦訊號

$$A\cos(\omega t+\varphi) = (A\cos\varphi)\cos(\omega t) - (A\sin\varphi)\sin(\omega t)$$

亦可分為 $\cos(\omega t)$ 與 $\sin(\omega t)$ 二分量、常以星座圖示之. 二事相似、可覺. 是以吾儕所欲者、立一結構、可以統御凡此類同之境.

由是觀之:「有列似向量」非充要也: 列之加法未必為向量之加法、且**非常列**之物——如函數、多項式——亦可行向量之道. 然則何謂向量? **當先介**域、以資立線性空間之本.

2 域之緒論

凡數學之基、以**集**為始. 設有集 S、惟有其名而無術、事難進. 故欲於 S 上立二**元運算**、即函數 $S\times S\to S$ 也. 二元運算者、謂 $A: S\times S\to S$ 之函數也.

> **例 1** (二元運算)
> - $\mathbb{R}$ 上之 $+,-,\times$ (問: $/$ 是否二元運算?)
> - 集上之 $\cup,\cap$ (問: $\subseteq,\subset$ 為二元運算乎?)
> - $\{\top,\bot\}$ 上之 $\wedge,\vee,\oplus$ (問: $\neg$ 為二元運算乎?)

域者、集 S 與二運算 $+$、$\cdot$ 所成之構、使凡 $a,b,c\in S$ 皆滿足:
- 加法結合律: $(a+b)+c = a+(b+c)$
- 加法交換律: $a+b = b+a$

- 加法單位元：$a + 0 = a$
- 加法之逆元：$\forall a, \exists b, a + b = 0$
- 乘法結合律：$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 乘法交換律：$a \cdot b = b \cdot a$
- 乘法單位元：$a \cdot 1 = a$
- 乘法之逆元：$a \neq 0 \to \exists b, a \cdot b = 1$
- 分配律：$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

證.（$0 + a = a$）由加法交換律可知矣. ∎

前四條構 $(S, +)$ 為**阿貝爾群**. 故亦可言：域者、$(S, +)$ 與 $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ 皆阿貝爾群、且乘法對加法分配也.

例 2（域之例）

- $\mathbb{Q}$（有理數）
- $\mathbb{R}$（實數）
- $\mathbb{C}$（複數）

而 $\mathbb{Z}$ 非域、蓋非零元素無乘法逆（如 $1/2 \notin \mathbb{Z}$）；$\mathbb{N}$ 非群、又況域乎（讀者可檢群之所謂而辨其故）.

3 向量空間

定義 1（向量空間）向量空間 V **於** 域 $\mathbb{F}$ 者、設集 V（其元曰向量）與域 $\mathbb{F}$（其元曰純量）、並二運算：向量加法：$+ : V \times V \to V$ 純量乘法：$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ 使凡 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$、$a, b \in \mathbb{F}$、皆有：

1. 結合：$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
2. 交換：$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
3. 加法單位：$\exists \boldsymbol{0} \in V, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$
4. 加法逆元：$\forall \boldsymbol{v}, \exists \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$
5. 數乘結合：$a(b\boldsymbol{v}) = (ab)\boldsymbol{v}$
6. 數乘單位：$1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$
7. 對向量加之分配：$a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$
8. 對純量加之分配：$(a + b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$

1)

於是可答「何為向量」之問：**向量者、向量空間之一元也**；其所以為向量、全由上八公理界定.

例 3（$\mathbb{R}^n$）

最熟之例：$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{R}\}$ 於 $\mathbb{R}$.

1) 換言之、$(V, +)$ 為阿貝爾群.

- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- $a \cdot (x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n)$
- 加法單位：$(0, \dots, 0)$
- 加法逆：$(-x_1, \dots, -x_n)$

例 4（多項式）

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad a_i \in \mathbb{R}\}$$

- 加：係數逐項相加
- 數乘：係數逐項乘以純量
- 加法單位：$0 + 0x + 0x^2 + \dots$
- 加法逆：係數取負

例 5（函數空間）

設 $\mathbb{F}^S$ 為 $S \to \mathbb{F}$ 之全體．定

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$
- $0(x) = 0$、$(-f)(x) = -f(x)$

則 $\mathbb{F}^S$ 於 $\mathbb{F}$ 為向量空間.

例 6（連續函數）

令

$$C(I) = \left\{ f \in \mathbb{F}^I \,\middle|\, (\forall x_0 \in I) \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \right\}$$

以連續之性閉於加法與數乘、故 $C(I)$ 亦為向量空間．更進而 $C^1(I), C^{n(I)}$（導數至 1 次、n 次皆連續）皆同.

例 7（線性微分方程之解）

方程

$$\left\{ y \in \mathbb{F}^I \,\middle|\, y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \right\}$$

之全體解、於 $\mathbb{F}$ 成向量空間；其加法與數乘同 例 5.

4 基本性質

命題 1（加法單位之唯一）向量空間之加法單位唯一.

證. 若 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 皆為加法單位、則 $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$ 又 $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$、以交換律得 $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. ∎

命題 2（加法逆元之唯一）每向量之加法逆唯一.

證. 設 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}'$ 皆為 $\boldsymbol{v}$ 之加法逆、則

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \mathbf{0} = \boldsymbol{w} + \left(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}'\right) = (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}' = \mathbf{0} + \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w}'.$$ ∎

命題 3 $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

證. $0\boldsymbol{v} = (0+0)\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v}$. 以加法逆消之、得 $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. ∎

命題 4 $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$、凡 $a \in \mathbb{F}$.

證. $a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} + a\mathbf{0}$. 移項得 $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$. ∎

命題 5 $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$.

證. $\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} = (1 + (-1))\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$、故 $(-1)\boldsymbol{v}$ 為 $\boldsymbol{v}$ 之加法逆. ∎

5 子空間

定義 2（子空間）$U \subseteq V$、若以與 V 同之純量域、加法單位、加法及數乘、使 U 自成向量空間、則謂 U 為 V 之**子空間**.

命題 6 $U \subseteq V$ 為子空間、當且僅當:

1. $\mathbf{0} \in U$
2. 封閉於加法: $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$
3. 封閉於數乘: $\boldsymbol{v} \in U, a \in \mathbb{F} \Rightarrow a\boldsymbol{v} \in U$

證. 直由定義可知. 反向: 若滿三條、則 $-\boldsymbol{u} = (-1)\boldsymbol{u} \in U$、加法逆具足; 結合、交換等律由 V 繼承. 故 U 為向量空間. ∎

例 8（子空間）

- *(過原點之直線)* 於 $\mathbb{R}^2$、凡過原點之直線皆子空間. 如

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\right\} = \{(t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

- *(偶/奇函數)* 於 $\mathbb{F}^S$、偶（或奇）函數之全體為子空間: 含零函數; 加法、數乘仍為偶（或奇）.
- *(連續函數)* $C(I) \subseteq \mathbb{F}^I$ 為子空間: 零函數在其中; 加法、數乘下仍連續.
- *(齊次線性微分方程之解)* 見 例 7: 零解在其內; 解之和仍為解; 純量乘亦然. 故為子空間.

6 子空間之和

定義 3（子空間之和）$U, W \subseteq V$、其和定為

$$U + W \coloneqq \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}.$$

須辨：$U \cup W$ 非 $U + W$；前者僅合併元素、未必為空間、後者自成向量空間、含兩者一切可加之和.

例 9

於 $\mathbb{R}^2$、令 $U = \{(x, 0)\}$、$W = \{(0, y)\}$、則

$$U + W = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2,$$

而 $U \cup W$ 但為兩坐標軸之合、非向量空間.

命題 7（最小包含性）子空間 $V_1, \ldots, V_m$ 之和 $V_1 + \ldots + V_m$、為 V 中**最小**之子空間、且包含各 V_k.

證. 可驗其含 $\mathbf{0}$ 且對加法、數乘封閉、故為子空間；各 V_k 皆其中（取和時餘向量為 $\mathbf{0}$ 即可）. 凡含諸 V_k 之子空間、必含其有限和、故必含 $V_1 + \ldots + V_m$. 所證如是. ∎