論數集

本章議數集之建構及諸性質．數集者、蓋數之集合也．數集之有、始於自然數．自然數之有、始於人數物之需．人數物以計其數、故有自然數也．自然數者、其性自然．人之所創者、記號而已矣．今之數學需以形式論理之、故欲明自然數之義、必議以公理．

數學之發展、非獨賴自然數也．蓋自然數之有、猶樹之有根本也．樹之有枝葉、賴根本而生也．數學之有他數集、賴自然數而立也．故分析學之始、必自自然數論也．

1 論自然數

公理 1（Peano 算數公理系統）算數語言 $\mathcal{L}_{\mathrm{AR}} = \{0, S, =\}$, 0 常符也、曰「零」．$S$ 一元函數符也、曰後繼．$=$ 等價關係也、曰「相等」．$x, y, \ldots$ 變元也．並以公理

- (PA1) $\forall x, S(x) \neq 0$;　　0 非後繼也
- (PA2) $\forall x, \forall y, (S(x) = S(y) \to x = y)$;　　後繼相等則原數相等
- (PA3) $\varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x \varphi(x)$　　一階歸納法模式
  - (PA3*) $\forall \varphi[\varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x \varphi(x)]$　　二階歸納法原理

(PA1) ~ (PA3) 曰一階 Peano 公理． 將 (PA3) 換為 (PA3*) 則曰二階 Peano 公理．後文所述皆用二階． 至此、算數之構造初成矣．然加法、乘之義猶未立也．$\mathcal{L}_{\mathrm{AR}}$ 外、加號 $+$, 乘號 $\times$, 小於號 $\leq$ 之義也、以中綴記遞歸立之如下:

定義 1（加法）

1. $x + 0 \coloneqq x$;　　加零得其數也
2. $x + S(y) \coloneqq S(x + y)$;　　加後繼得和之後繼也

註：為了體現還原論的精神、我們這裡採用了 5 公理版本的基本 PA 公理系統、$+, \times$ 不在 $\mathcal{L}_{\mathrm{AR}}$ 中．因此不能固然保證對於任何 $x + y$ 皆「有定義」、即表示 $\mathcal{L}_{\mathrm{AR}}$ 中一項 (term)．此實良義也．蓋凡 x、可證加法於 y 皆有定義．設 $P(y) \coloneqq x + y$ 有定義、若 $y = 0$、則依 (1) 知有定義也．若 $x + y$ 有定義、則以 (2) 而 $x + S(y)$ 亦有定義．由 PA3 知全有定義也．

有關乘法之公理:

- (PA8) $\forall x(x \times 0 = 0)$;　　乘零得零也
- (PA9) $\forall x, \forall y(x \times S(y) = (x \times y) + x)$;　　乘後繼得

1.1 自然數集

在集合論中、$\mathcal{L}_{\mathrm{AR}}$-結構之適 PA 公理系統者 Dedekind-Peano 結構也．定義「自然数集」．

定義 2（Dedekind-Peano 結構）三元組 $\mathfrak{N} \coloneqq (\mathbb{N}, 0, S)$ 曰 Dedekind-Peano 結構、$\mathbb{N}$ 論域也, $0 \in \mathbb{N}, S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_* \coloneqq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 單射也、曰後繼函數．且

- 若 M 者 $\mathbb{N}$ 之子集含 0 也．若 $(\forall n \in M) Sn \in M$、則 $M = \mathbb{N}$ 也．

$S^{\mathfrak{N}}$ 之值域 $\mathbb{N}_*$ 也、使 PA1 成立、單射性使 PA2 成立. PA3 得以定義中之歸納性明也.

然則 $\mathfrak{N} \vDash \mathrm{PA}$、即此結構滿足 PA1 ~ PA3*. 凡 Dedekind-Peano 結構者皆 PA 之模型也. [1] 然則確有合 Dedekind-Peano 結構之造耶?「歸納集」是也、但此處不深究. 而 Dedekind (1888) 证明了所有二階 Peano 算數的模型都同構的. 即同构意义上只有一种自然数集.

察時針之刻、$N' \coloneqq \{?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?\}, 0' \coloneqq ?$. S 進一時刻也. 然則 $? = S?$、是以不適 N_0 而非 Dedekind-Peano 結構也.

又察下例、$N' \coloneqq \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}, 0' \coloneqq \heartsuit$. 設 S 其義如下. $\diamondsuit = S\heartsuit = S\spadesuit$ 違於 N_1 而非 Dedekind-Peano 結構之屬也.

$$
\begin{tikzcd}
\heartsuit \arrow[r, mapsto, "S"] & \diamondsuit \arrow[r, mapsto, "S"] & \clubsuit \arrow[r, mapsto, "S"] & \spadesuit \arrow[ll, mapsto, bend left, "S"]
\end{tikzcd}
$$

ν 滿射也. 即 $\forall n \in \mathbb{N}_*, \exists m \in \mathbb{N}, Sm = n$

證. 設 $M \coloneqq \operatorname{Im}\nu \cup \{0\} = \{n \in \mathbb{N}_* \mid \exists n' \in \mathbb{N}, Sn' = n\} \cup \{0\}$. 若 $m \in M \subseteq \mathbb{N}, Sm \in \operatorname{Im}\nu \subseteq M$. 由 N_1 知 $M = \mathbb{N} = \mathbb{N}_* \cup \{0\}$. 以 $0 \notin \operatorname{Im}\nu, \operatorname{Im}\nu = \mathbb{N}_*$ 故 ν 滿射也. ∎

1.2 序

加法既立、則可定義自然數之序.

> **定義 3** (序關係) 凡自然數 n, m、若有 $k \in \mathbb{N}$ 使 $n = m + k$、則曰 m 小於等於 n、記 $m \leq n$. 若 $k \neq 0$、則曰 m 小於 n、記 $m < n$.

此序關係全序也、凡自然數皆可相較也.

證. 此序關係為全序、須證四性:

自反性 ($n \leq n$):
由加法定義、$n = n + 0$. 以 $0 \in \mathbb{N}$、故 $n \leq n$ 恆真.

反對稱性 ($m \leq n$ 且 $n \leq m \Rightarrow m = n$):
若 $m \leq n$、則有 $k_1 \in \mathbb{N}$ 使 $n = m + k_1$.
若 $n \leq m$、則有 $k_2 \in \mathbb{N}$ 使 $m = n + k_2$.
代入得 $m = (m + k_1) + k_2 = m + (k_1 + k_2)$. 此式意味 $k_1 + k_2 = 0$. 二自然數之和為零、必二者皆零也、故 $k_1 = 0$. 是以 $n = m + 0 = m$.

傳遞性 ($l \leq m$ 且 $m \leq n \Rightarrow l \leq n$):
若 $l \leq m$、則有 k_1 使 $m = l + k_1$.
若 $m \leq n$、則有 k_2 使 $n = m + k_2$.
代入得 $n = (l + k_1) + k_2 = l + (k_1 + k_2)$. 令 $k_3 = k_1 + k_2$、則 $k_3 \in \mathbb{N}$、故 $l \leq n$.

1) 但注意滿足一階 PA 的集合不全是 Dedekind-Peano 結構、因一階算數必有非標準模型. Dedekind-Peano 结构是二階邏輯. N1 等价于二阶归纳原理.

完全性 ($m \le n$ 或 $n \le m$):
此可用歸納法證之. 固定 $m \in \mathbb{N}$、歸納于 n. 令命題 $P(n) \coloneqq m \le n \vee n \le m$.

- **基始**: $n = 0$.
  由加法定義、$m = 0 + m$. 故 $0 \le m$ 恆為真. 是以 $P(0)$ 成立.
- **歸納**: 設 $P(n)$ 為真、即 $m \le n$ 或 $n \le m$. 察 $P(S(n))$.
  - 若 $m \le n$、則有 k 使 $n = m + k$. 故 $S(n) = S(m + k) = m + S(k)$. 是以 $m \le S(n)$. 此時 $P(S(n))$
  - 若 $n \le m$、則有 k 使 $m = n + k$.
    - 若 $k = 0$、則 $m = n$. 故 $Sn = Sm = m + S0$、則 $m \le S(n)$. 此時 $P(Sn)$.
    - 若 $k \ne 0$、則有 k' 使 $k = S(k')$. $m = n + S(k') = S(n) + k'$. 是以 $S(n) \le m$. 此時 $P(S(n))$.

綜上、凡 $\vdash P(n) \to P(S(n))$. 由是、據歸納公理、完全性得證. ∎

1.3 記數法

然加法既成、尚需記數之法以表之. 吾人所習用者、十進位制也. 蓋以十為基、逢十進一. 所用數碼、印度-阿拉伯數字也、凡十、曰 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

> **定義 4** (十進位表示法) 凡自然數 $n \in \mathbb{N}$、其十進位表示乃一字符串 $s_k s_{k-1} \ldots s_1 s_0$、其中 s_i 皆為數碼. 此串之值、定義如下:
>
> $$n = \sum_{i=0}^{k} s_i \times 10^i$$
>
> 其中 10 為 $\nu(9)$. 此式建立自然數與數碼串之對應.

此映射如何構造? 可以遞歸為之. 凡 $n \in \mathbb{N}$、其記數 $f(n)$ 定義為:

- 若 $n < 10$、則 $f(n)$ 為對應之數碼. 如 $f(\nu(0))$ 為 "1".
- 若 $n \ge 10$、則以帶餘除法可得 $n = q \times 10 + r$、其中 $0 \le r < 10$. 則 $f(n)$ 為 $f(q)$ 與 $f(r)$ 之拼接.

若、欲求 123 之表示.

1. $123 = 12 \times 10 + 3$
2. $12 = 1 \times 10 + 2$
3. $1 = 0 \times 10 + 1$

由是、$f(123)$ 為 $f(12)$ 拼接 $f(3)$、即 $f(1)$ 拼接 $f(2)$ 再拼接 $f(3)$、終得 "123".

至此、抽象之自然數集方有吾人熟識之形態.

2 論整數

相等關係

$$a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$$

凡自然數 n、察對射於 $\mathbb{N} \to \{n - 0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ 上者 $n \mapsto n - 0$. 知整數之形如 $n - 0$ 者同構於 $\mathbb{N}$ 也. 故可以整數 n 記自然數 $n - 0$ 而無虞也. 逆元

$$-a \coloneqq 0 - a$$

3 分數論

相等關係

$$a//b = c//d \Leftrightarrow ad = bc$$

必有

$$\big(\exists x//y \in [a//b]\big)\,\mathrm{gcd}\big(x, y\big) = 1$$

約式、或曰**最簡分式**、分式之子母互素者也．例如 1/1、2/3、5/8．以其子母皆最小、立爲 $\mathbb{Q}/=$ 之代表元也．稠性: a

4 實數論

請問、正方形之對角線長 l 幾何? 以勾股定理知 $l^2 = 2$、擬其長以一分數之約式 $l = p/q$

$$l^2 = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2 \mid p^2 \Leftrightarrow 2 \mid p$$
$$\Leftrightarrow \exists p'\big(p = 2p'\big) \Leftrightarrow 2p'^2 = q^2 \Leftrightarrow 2 \mid q^2 \Leftrightarrow 2 \mid q$$

p 與 q 皆偶數、而 p/q 非約式也．故知 l 非分數之屬也．以 Ἵππασος 之初覺爲嚆矢、分數之遺缺始昭於天下矣．此所以分數不可以度量也．

另察一例、有集分數其平方皆小於 2 者

$$\mathbb{Q}_{<\sqrt{2}} \coloneqq \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

即知有上界也．而無上確界．擬以歸謬法證之: 設其上確界爲 $\bar{x}$、則 $\forall x \in \mathbb{Q}_{<\sqrt{2}}, \bar{x} \geq x$、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in \mathbb{Q}_{<\sqrt{2}}, \bar{x} - \varepsilon < y$$

由全序關係之三歧性知

1. 若 $\bar{x}^2 = 2$: 證偽
2. 若 $\bar{x}^2 > 2$、需證明 $\exists y \in \mathbb{Q}_{<\sqrt{2}}, y < \bar{x}$、設 $y = \bar{x} - \varepsilon$、並使 $y^2 > 2$．即 y 爲上界而甚小耳．

$$(\bar{x} - \varepsilon)^2 \geq 2 \Leftrightarrow \bar{x}^2 - 2\bar{x}\varepsilon + \varepsilon^2 > 2 \Leftarrow \bar{x}^2 - 2\bar{x}\varepsilon \geq 2 \Leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{\bar{x}^2 - 2}{2\bar{x}}$$

   不妨取 $\varepsilon = \frac{\bar{x}^2-2}{2\bar{x}}$、即爲證
3. 若 $\bar{x}^2 < 2$、需證明 $\exists y \in \mathbb{Q}_{<\sqrt{2}}, y > \bar{x}$、設 $y = \bar{x} + \varepsilon$．即 $\bar{x}$ 乃非上界耳．

$$y^2 = (\bar{x} + \varepsilon)^2 \leq 2 \Leftrightarrow \bar{x}^2 + 2\bar{x}\varepsilon + \varepsilon^2 < 2 \Leftarrow \bar{x}^2 + 2\bar{x}\varepsilon \leq 2 \Leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{2 - \bar{x}^2}{2\bar{x}}$$

   不妨取 $\varepsilon = \frac{2-\bar{x}^2}{2\bar{x}}$、即爲證

故知 $\mathbb{Q}_{<\sqrt{2}}$ 上確界之不存也．

二例．

$$\mathbb{Q}_{<2} \coloneqq \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 4\}$$

可知 $x \geq 2$ 皆上界也、而$\sup \mathbb{Q}_{<2} = 2$也

凡 Q 爲 $\mathbb{Q}$ 上非空有上界子集、則定義為實數．全序集 $(X, \preceq)$．若其非空子集之有上界者有上確界．曰**序完備**