

論數列

1 數列單調收斂之定理

凡單調遞增數列之有上界者與單調遞減數列之有下界者、皆收斂。請證明之。

2 極限

若夫極限者、古希臘之先賢始用之。自古及 Weierstrass



图 1 Karl Weierstrass, 1815-1897

之議、歷久而鮮能盡其理實也。微分與無窮小之辯、相爭其存廢逾千載猶未能決。其或為 0、或幾及 0 而非 0。時 0 而時亦非 0、George Berkeley 之屬者甚異之。物理學家屢以無窮小正定所求不爽、故不以為謬也。數學之理也、必明必晰。然則應先辯明所謂極限者、後可以確然治分析無慮也。

定義 1 (極限) 稱數列 $\{a_n\}$ 之極限曰

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}^*)(\forall n > N)|a_n - L| < \varepsilon$$

極限者近而不逮、傍而未屆也。 a_n 之值將屆於 L 、抑不之至。不得知也。若以 $\varepsilon - N$ 定義議之。恣取正數 ε 、不論大小、必存一處 N 、凡 n 之後於 N 者、 a_n 與 L 相距幾微。何以知其然也？蓋其相距小於 ε 者也。凡正數者、皆見小於 a_n 與 L 之相距、此所以度量其近也。豈非因 n 之漸長而 a_n 幾及於 L 耶？！此定義也、初立論時、不納者眾、至于今世、莫不是之！

2.1 單調有界性之定理

數列之收斂者、其極限必存焉。以單調有界性之定理得知其收斂而不得知其極限也。欲察極限幾何、猶須探其值而後驗以定義也。幸有各術如下以索數列之極限、一曰夾逼定理、二曰四則運算、三曰 Stolz-Cesàro 定理也。

2.2 夾逼定理

夾逼定理者、求極限之要術也。設有數列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ 、自某項起恆有 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 、且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ 、則必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ 也。

命題 1 (夾逼定理) 設數列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ 滿足

$$(\exists N \in \mathbb{N}^*)(\forall n > N) a_n \leq b_n \leq c_n$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ 、則 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ 。

證。 以極限定義證之。設 $\forall \varepsilon > 0$ 、因 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 、故

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N}^*)(\forall n > N_1) |a_n - L| < \varepsilon$$

即 $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ 。同理、因 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ 、故

$$(\exists N_2 \in \mathbb{N}^*)(\forall n > N_2) |c_n - L| < \varepsilon$$

即 $L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$ 。

取 $N_0 = \max\{N, N_1, N_2\}$ 、則當 $n > N_0$ 時有

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$$

故 $|b_n - L| < \varepsilon$ 、即 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ 。 ■

若數列 $\{b_n\}$ 之極限難可詳悉、但得覓取上下夾逼之數列 $\{a_n\}$ 與 $\{c_n\}$ 、則可藉求 $\{a_n\}$ 與 $\{c_n\}$ 之極限而得 $\{b_n\}$ 之極限也。

例以議之。

例 1

請證

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

蓋 $|\sin n| \leq 1$ 、故

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1/n) = 0$ 、由夾逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ 也。

夾逼定理不獨用於數列、亦可推廣於函數極限。設函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 於點 x_0 之某鄰域內（或去心鄰域內）滿足 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 、且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ 、則 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ 也。

2.3 極限之代數運算

極限之加減乘除是也。設以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$ 、由定義知 $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & (\exists N_a \in \mathbb{N}^*)(\forall n > N_a)|a_n - L| < \varepsilon \\ \wedge & (\exists N_b \in \mathbb{N}^*)(\forall n > N_b)|b_n - M| < \varepsilon \end{aligned}$$

故而 $|-a_n - (-L)| = |a_n - L| < \varepsilon$ 、是以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -L \quad (1)$$

也。設 $N := \max\{N_a, N_b\}$ 、以三角不等式

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon$$

故而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + M \quad (2)$$

並由式 1 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = L - M$ 也。

此所以極限之代數運算效也。

$$|a_n b_n - LM|$$