

論級數

1 級數論

級數者、數列之累和也。累數列 $\{a_n\}$ 前 n 項之和、名曰 $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ 。則記

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

為無窮級數、畧作級數。其中凡 $a_n > 0$ 者、謂之正項級數。若 s_n 收斂即曰級數收斂。 s_n 發散即謂之級數發散。

命題 1 凡級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 之收斂者

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

證。 不妨設 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$ 、 $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ 收斂於 L 。然則由極限定義知、於凡正數 $\varepsilon > 0$ 之中、必存有一自然數 N 、而凡自然數 n 之 $n > N + 1$ 者

$$|s_{n-1} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

然則

$$|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又因 $s_n = s_{n-1} + a_n$ 、故 $\forall n > N$

$$|s_n - L - (s_{n-1} - L)| \leq |s_n - L| + |s_{n-1} - L| < \varepsilon$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。 ■

欲料反之然否、請道以下例。

例 1 (調和級數)

調和級數者、形如 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 之級數也。雖 $1/n \rightarrow 0$ 於 $n \rightarrow \infty$ 、然其級數發散。請證以比較審斂法：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

分組而計：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots\end{aligned}$$

無界而知其發散也。此為 Nicole Oresme 於十四世紀所證也。

有諸據可以斷級數之斂散。請道其詳。

1.1 檢比術

1.2 檢根術

2 常數 e

常數 e、或曰自然底數、初見於複利率之計算。凡 $n > 0$ 有定義曰

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

此處唯需證明 RHS 收斂。請道其證法。

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!n^k}$$

$\frac{n^k}{k!n^k} > 0$ 、則知 a_n 之嚴格遞增矣。考慮

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-\frac{1}{2}} < 1$$

故 b_n 單調遞減且 $b_n = a_n \sqrt{1 + 1/n} > a_n$ ，故 b_n 皆 a_n 之上界也。故知 a_n 收斂。 $2 = a_1 < e < b_1 = 2\sqrt{2}$.¹⁾

例 2 (別證)

茲定義曰 $e_n := \sum_{k=0}^n 1/k!$ 、由 $(\forall k \geq 1) 1/k! \leq 1/2^{k-1}$

$$\begin{aligned}e_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{2 \times \cdots \times (n-1) \times n} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 3\end{aligned}$$

1) 實則 $b_n \simeq a_n$ as $n \rightarrow \infty$

抑由 $\forall k \geq 2$

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$e_n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 3$$

得 3 者 e_n 之上界也。同理可證 e_n 之收斂也。由定義知 $\sup a_n = e$ 也。以前例亦得證 e_n 之收斂。然 $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n \stackrel{?}{=} e$ 之真偽猶未能辨、不宜臆斷。

再證二者收斂於同處。庶幾以夾逼定理證之、唯需各項 $a_n < e_n < e$ 。以上圖料其然也。然理學也非證不信非驗不服。請證之如下。

證。張 a_n 如下, $\forall k < n$

$$a_n = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-m+1}{n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad (1)$$

$$> 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

令 $n \rightarrow \infty$ 。然則 $k \in \mathbb{N}$

$$e > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = e_k$$

逐項比較式 1 與 e_n 、知 $e_n > a_n$ 。故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$$

■

2.1 指數函數

定義 exp 函數曰

定義 1 (exp 函數)

$$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

審其斂散、法以比值

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| / \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \rightarrow 0 \text{ 當 } n \rightarrow \infty$$

故冪級數 $\exp x$ 於 $\mathbb{R}$ 處處絕對收斂也。

3 差分方程論

請問線性微分方程如 $y'' + y = 0$ 者當作何解? 得特徵方程 $r^2 + 1 = 0$ 有根 $r = \pm i$ 故知通解爲 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. 代入即明此誠爲其解也. 此全解耶? 請論其理. 定義數列 $\{x_n\}$ 之前向差分算子曰

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

而逆向差分算子曰

$$\nabla x_n = x_n - x_{n-1}$$

$n \geq 0$ 階差分遞歸定義曰

$$\Delta^n = \begin{cases} I & \text{if } n = 0 \\ \Delta \circ \Delta^{n-1} & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

因 $\Delta(ax_n + by_n) = a\Delta x_n + b\Delta y_n$, 可知 Δ 爲線性算子. 又以 I 之線性、知 Δ^n 亦線性也. 稱形如

$$\sum_{k=0}^n a_k \Delta^k x_k = b$$

之方程式曰 n 階常係數差分方程. 特稱 $b = 0$ 者爲齊次、否則爲非齊次. 若有一列數 $\hat{x}_n$ 可令 $x_n = \hat{x}_n$ 滿足方程、則稱 $\hat{x}_n$ 爲方程之解. 請探其性質. 凡非齊次方程之解 $\{\hat{x}_n\}$ 、 $\{\hat{y}_n\}$ 、其和 $\{\hat{x}_n + \hat{y}_n\}$ 亦解矣

$$\sum_{k=0}^n a_k \Delta^k (\alpha \hat{x}_k + \beta \hat{y}_k) = \alpha \sum_{k=0}^n a_k \Delta^k \hat{x}_k + \beta \sum_{k=0}^n a_k \Delta^k \hat{y}_k = 0$$