

論集合

閱讀本文需備初等數學基礎、並略知邏輯與集合論。

1 ZFC 公理

若夫集合者、聚同屬之物也。

命題 1 (內涵公理) 設 φ 為一元謂辭

$$\exists A \forall x (x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$$

然則、適 φ 者皆見於 A 、 A 之所有悉適 φ 也。記

$$A = \{x \mid \varphi(x)\}$$

查察下例

例 1 (Russell's 悖論)

設

$$X = \{\text{集合未嘗言及於本文者}\}$$

則 $X \notin X$ 、無己之集也。聚此屬以為一集

$$A = \{x \mid x \notin x\}$$

則此集有己乎？ $A \in A \leftrightarrow A \notin A$ 故悖論也。

是以宜畧為限。

命題 2 (分離公理模式) 設 φ 為一元謂辭

$$\forall A \exists B \forall u (u \in B \leftrightarrow u \in A \wedge \varphi(u))$$

內涵公理許擬集以任意謂詞、致生悖論。而依分離公理則止得分自既有之母集 B 也。依然設 $\varphi(u) = u \notin u$ 、凡集合 A 、子集 $R_A = \{x \in A \mid x \notin x\}$ 集也。以排中律或 $R_A \in R_A$ 或 $R_A \notin R_A$ 。代入分離公理得： $R_A \in R_A \leftrightarrow (R_A \in A \wedge R_A \notin R_A)$ 、若 $R_A \in R_A$ 則 $R_A \notin R_A$ 、此似反也、非反也； $R_A \notin A$ 故也。如是、凡集合常有子集之外乎己者、所謂莫有万全之集合也。(Zermelo 1908)

命題 3 (外延公理)

$$\forall A \forall B (A = B \leftrightarrow (\forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B))$$

外延公理謂集之相等以其元之相等為準也。

1.1 集合代數

設 A, B 皆集也. 納 A 及 B 之所有為一集、曰 A 與 B 之**并集**、記 $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

擇 A 及 B 之共有為一集、曰 A 與 B 之**交集**、記 $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

A 之所有之不見於 B 者、曰 A 與 B 之**差集**、記 $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

1.2 子集與空集

設 A 集也. 若分 A 為一新集 B 、曰 A 之**子集**、記 $B \subseteq A$. 然則凡 $b \in B$ 者悉見於 A 也.

$$B \subseteq A := (\forall b \in B) b \in A$$

若 $B \subseteq A$ 且 $B = A$ 、則曰 B 為 A 之**真子集**、記 $B \subset A$.

集合無所有者曰**空集**、記 $\emptyset$ 、又 $\{\}$. 凡集、 $\emptyset$ 皆其子集也.

證. 設 A 集也. 欲證 $\emptyset \subseteq A$ 、即證 $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$. 蓋 $\emptyset$ 無元也、故前項為假而命題空真矣. ■

1.2.1 集族

集合之集曰**集族**. 凡集合 S 之子悉聚以為族、謂之**幂集**、記 $\mathcal{P}(S) := \{x \mid x \subseteq S\}$. 譬若 $\mathcal{P}\{1, 2\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. S 子集之族曰**子集族**. $\mathcal{P}(S)$ 之子集也.

$\mathcal{F}$ 集族也.

$$\bigcup \mathcal{F} := \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F := \{x \mid (\exists F \in \mathcal{F}) x \in F\}$$

名曰 $\mathcal{F}$ 之**一般並**也. $\mathcal{F}$ 非空¹⁾則謂

$$\bigcap \mathcal{F} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F := \{x \mid (\forall F \in \mathcal{F}) x \in F\}$$

曰 $\mathcal{F}$ 之**一般交**也. 且較然易見

$$\bigcup \{A, B\} = A \cup B$$

$$\bigcap \{A, B\} = A \cap B$$

若 $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \neq B \rightarrow A \cap B = \emptyset$ 則記 $\bigcup \mathcal{F}$ 為 $\bigsqcup \mathcal{F}$. 曰**不交並**.

設 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 、 $\emptyset \notin \mathcal{F}$ 、 X 之非空子集族也.

$$\bigsqcup \mathcal{F} = X$$

則曰 $\mathcal{F}$ 為 X 之**劃分**.

1) 莫有万全之集合故也

1.3 元組與直積

夫有序對者、亦曰二元組、記 (a, b) 。所謂 (Kuratowski 1921) 如下

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

遂

- $(b, a) = \{\{b\}, \{b, a\}\} \neq (a, b)$
- $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\} \neq \{a\} = (a)$

命題 4 $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

證.

- $(\leftarrow)$ 較然可見.
- $(\rightarrow)$ $a_1 = b_1$ 則

$$\{\{a_2\}, \{a_2, b_2\}\} = (a_2, b_2) = (a_1, b_1) = \{\{a_1\}\}$$

遂可見 $\{a_2\} = \{a_2, b_2\} = \{a_1\} \rightarrow a_2 = b_2 = a_1 = b_1$.

不然、 $a_1 \neq b_1$ 則

$$\{\{a_2\}, \{a_2, b_2\}\} = (a_2, b_2) = (a_1, b_1) = \{\{a_1\}, \{a_1, b_1\}\}$$

等式右側集合有二元、左側亦宜然。遂 $a_2 \neq b_2$ 。而 $\{a_2\} = \{a_1\}$ 、 $\{a_2, b_2\} = \{a_1, b_1\}$ 可知矣。於是 $a_2 = a_1$ 且 $b_2 = b_1$ 也。 ■

若夫 a 所有于 A 、 b 所有于 B 者、遍聚二元組之集合謂之 A 與 B 之直積、記 $A \times B$ 。所謂如下

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

且可施及 n 集。

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \begin{cases} A_1 & \text{若 } n = 1 \\ (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n & \text{若 } n > 1 \end{cases}$$

亦可記作 $\prod_{i=1}^n A_i$ 、 n 維直積之元素稱為 n 元組。內層括弧可省、若

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) := (\cdots((a_1, a_2), a_3), \dots, a_n)$$

1.4 關係

集合 $R \subseteq A \times B$ 者、謂之 A 與 B 上之二元關係、畧以關係。若 $A = B$ 即 $R \subseteq A^2$ 則曰 A 上之關係。 $(a, b) \in R$ 則曰 (a, b) 適 R 。以中綴表達式記曰 aRb 、亦可記以前綴式並輔以括弧讀號、曰 $R(a, b)$ 。

夫 R 之定義域者、

$$\text{dom } R := \{a \in A \mid (\exists b \in B) aRb\}$$

夫像域者、

$$\text{im } R := \{b \in B \mid (\exists a \in A) aRb\}$$

逆關係

$$R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

也。則 $\text{dom } R^{-1} = \text{im } R$ 且 $\text{im } R^{-1} = \text{dom } R$ 。二元關係 S 與 R 之複合謂以

$$S \circ R := \{(a, c) \mid \exists b \in B, (a, b) \in S \wedge (b, c) \in R\}$$

例 2

大學校園中，設 A 為生集、 B 為課程、 C 為師集。則 $S \subseteq A \times B$ 為學生受業關係、 $R \subseteq B \times C$ 為教師受業關係。然則 $S \circ R$ 為師生關係也。某生與某師有師生關係，則有某課師授而生受也。

1.5 等價關係

設 $\sim$ 為集 S 上之二元關係。適三性如下列者謂 S 上之等價關係：

- 自反性： $(\forall s \in S) s \sim s$
- 對稱性： $(\forall s, t \in S) s \sim t \rightarrow t \sim s$
- 傳遞性： $(\forall s, t, u \in S) s \sim t \wedge t \sim u \rightarrow s \sim u$

設 $\sim$ 為 S 上之等價關係、凡 $s \in S$ 、集合 $[s]_{\sim} := \{t \in S \mid s \sim t\}$ 名曰 s 之等價類。 S 之等價類族曰商集、記 $S/\sim := \{[s]_{\sim} \mid s \in S\}$ 。

命題 5 S 之等價關係與其劃分一一對應也

證。 設 $\sim$ 為等價關係之於 S 。商集 $S/\sim$ 為 S 之劃分也。證之如下

1.6 恆等關係

記 S 上之恆等關係曰 id_S

$$\text{id}_S := \{(s, s) \mid s \in S\}$$

若 $S = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit\}$ 、 $\text{id}_S = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\diamond, \diamond), (\heartsuit, \heartsuit)\}$

恆等關係者、等價關係也。

1.7 偏序關係

$(S, \leq)$ 設以為結構之並以關係者、並有

- 自反性： $(\forall s \in S) s \leq s$
- 反對稱性： $(\forall s, t \in S) s \leq t \wedge t \leq s \rightarrow s = t$
- 傳遞性： $(\forall s, t, u \in S) s \leq t \wedge t \leq u \rightarrow s \leq u$

則 $\leq$ 名曰偏序關係。偏序關係之最小者、唯恆等關係也。不難證明之。

(1) id 適自反性、反對稱性、傳遞性、故為偏序關係也。

- (2) 凡 $(\forall s \in S) \text{id} \setminus \{(s, s)\}$ 之關係皆以有違自反性而非偏序關係也。故最小也
 (3) 凡偏序關係必含 id 也。可以歸謬法示其唯一也。

若夫偏序之匪等也、謂之**嚴格偏序**。記 $<$ 。 $a < b := a \leq b \wedge a \neq b$

1.8 最大與最小

$(T, \leq)$ 偏序之構也。 $s \in T$ 、若夫

- $\forall t \in T, s \not\leq t$ 、莫大於 s 。 s 謂之**極大**。
- $\forall t \in T, t \not\leq s$ 、莫小於 s 。 s 謂之**極小**。
- $\forall t \in T, t \leq s$ 、皆小於 s 。 s 謂之**最大**、記 $\max T = s$ 。
- $\forall t \in T, s \leq t$ 、皆大於 s 。 s 謂之**最小**、記 $\min T = s$ 。

最大（小）者極大（小）也。

非空有窮偏序集者、偏序集之非空且有窮也。

- 極大（小）元常有。
- 最大（小）元不常有。若 $T = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit\}$ 、偏序關係 $\leq = \text{id}$ 。 $\clubsuit$ 孰與 $\diamond$ ？所以無最大（小）元者、不可比而已。

非空有窮全序集常有最大（小）元。請擬以歸納證明之

證。（非空有窮全序集 S 有最大元）

- (1) $|S| = 1$ 、 S 之元唯一、即最大最小元也。
 (2) $|S| = 2$ 、設 $S = \{t_1, t_2\}$ 、其最元得計算如下

$$\max S = \begin{cases} t_1 & \text{if } t_2 \leq t_1 \\ t_2 & \text{if } t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

- (3) 設 $|S| = N$ 、 S 有最大元。察 $|S| = N + 1$ 、令 $S' = S \setminus \{s\}$ 。由前款知 S' 有最大元 M' 。然則 $\max S = \max\{M', s\}$ 、 S 之最大元也。 ■

集之界、不逾之境也。凡集 $S \subseteq T$ 之元 s 、其或 $s \leq M$ 者、則謂 M 為 S 一**上界**。反之、若 $M \leq s$ 則曰**下界**。上下界並存、則謂之**有界**。界不必含於集也。上界之最小者、曰**上確界**、或曰最小上界、記 $\sup S$ 。下界之最大者、曰**下確界**、或曰最大下界、記 $\inf S$ 。

$$\sup S = \min\{t \in T \mid s \in S, s \leq t\}$$

$$\inf S = \max\{t \in T \mid s \in S, t \leq s\}$$

若夫上界與上確界、察其性質、凡有二項、一曰 $\sup S$ 乃 S 之上界也、二曰凡其上界莫小於 $\sup S$ 、最小之上界也。請問偏序集恆有上界乎？ 1. 有窮集顯然恆有界、且 $\sup S = \max S$ 而 $\inf S = \min S$ 也。依序可列 S 之元、

1.9 全序關係

若改 $\leq$ 之自反性為完全性、即悉適

- 完全性： $(\forall s, t \in S) s \leq t \vee t \leq s$
- 反對稱性： $(\forall s, t \in S) s \leq t \wedge t \leq s \rightarrow s = t$
- 傳遞性： $(\forall s, t, u \in S) s \leq t \wedge t \leq u \rightarrow s \leq u$

者、謂曰**全序關係**、或曰**鏈**。凡全序之關係、恆偏序也。請備述之。全序關係適反對稱性與傳遞性、並以完全性蘊含自反性即知其亦偏序也。

命題 6 設 $(X, \leq)$ 為全序集。下列三命題等價也。

- (1) 凡 X 之非空子集有上界者有上確界
- (2) 凡 X 之非空子集有下界者有下確界
- (3) A, B 皆 X 之非空子集也。凡 A 中之 a 與 B 中之 b 使 $a \leq b$ 者。 X 中必有一元 c 間於 a, b 、即 $\exists c \in X, a \leq c \leq b$

證。 (1) $\Rightarrow$ (2): 使 A 為 X 之非空子集也、且有下界。集 A 之下界以為 $B := \{b \in X \mid b \leq a, \forall a \in A\}$ 以 A 有下界知 B 之不空也。凡 $a \in A$ 皆為 B 上界也。故 B 有上確界也。假 $m := \sup B$ 、而 $m \leq a$ 也 (以上確界乃最小上界故耳)。故知、 $m \in B$ 而 $m = \max B$ 。 A 下界之最大者也。
 $m = \inf A$ 。

(2) $\Rightarrow$ (3): 設 A, B 皆 X 之非空子集也。 $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$ 也。故知 A 之元俱為 B 之下界也。由 (2) 知 B 有下確界、設以為 $c := \inf B$ 、則 $a \leq c \leq b$ 、即所求也。

(3) $\Rightarrow$ (1):

2 映射

X, Y 皆設以為集也。夫**偏映射**者、 $X \times Y$ 上之二元關係 f 之

$$(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \rightarrow y = y'$$

者也。若夫定義域、像域、逆、複合之所謂、悉承自二元關係也。若定義域 $\text{dom } f = X^2$ 、則曰**全映射**、簡稱**映射**。記 $f: X \rightarrow Y$ 、 Y 曰**終域**。若 $(x, y) \in f$ 、記曰 $f(x) = y$ 或 $f: x \mapsto y$ 。若 Y 為一數集、則 f 謂之**函數**。

2.1 限制與擴展

$f: X \rightarrow Y$ 為映射也、 $S \subseteq X$ 、集合

$$f[S] := \{f(s) \mid s \in S\}$$

名曰 f 於 S 之**像集**。

命題 7 $f[S] \subseteq f[X] = \text{im } f$

證。 一者較然可見。二者、即證 $f[X] \subseteq \text{im } f$ 及 $f[X] \supseteq \text{im } f$ 。其中 $\text{im } f = \{y \in Y \mid (\exists x \in X) f(x) = y\}$ 承義自二元關係。

($\subseteq$) $\forall y \in f[X] = \{f(x) \mid x \in X\}$ 有 $x \in X$ 遂使 $y = f(x) \in Y$ 。故 $y \in \text{im } f$ 。

($\supseteq$) $\forall y \in \text{im } f$ 有 $x \in X$ 遂使 $y = f(x)$ 。是以 $y \in f[X]$ 。

定義函數 f 於 S 之**限制** $f|_S: S \rightarrow Y$ 、 $f|_S(s) := f(s)$ 。於是 $\text{im } f|_S = f[S]$ 。

2) 即 $X \subseteq \text{dom } f$

2.2 單滿性

$f: X \rightarrow Y$ 映射也。夫**單射**者、

$$f(x) = f(x') \rightarrow x = x'.$$

為 f 之不同元有不同像也。夫**滿射**者、

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y.$$

夫**對射**者、單射且滿射。

命題 8 $f: X \rightarrow Y$ 滿射 $\leftrightarrow \text{im } f = Y$

證. $(\rightarrow)$ 設 f 滿射也。欲證 $\text{im } f = Y$ 、即證 $\text{im } f \subseteq Y$ 且 $Y \subseteq \text{im } f$ 。前者較然。及後者、蓋 f 滿射、故 $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ 。是以 $y \in \text{im } f = \{f(x) \mid x \in X\}$ 。

$(\leftarrow)$ 設 $\text{im } f = Y$ 。欲證 f 滿射也、即證 $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ 。蓋 $\text{im } f = Y$ 、則 $\forall y \in Y, y \in \text{im } f$ 。是以 $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ 。 ■

是故、函數之單射否、滿射否、對射否、需論以定義域與終域。如函數 $f: x \mapsto x^2$ 之於下列集合中。

$x \mapsto x^2$	單	滿
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	⊥	⊥
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	⊥	⊤
$\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$	⊤	⊥
$\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	⊤	⊤

單射乎、滿射乎、各不同也。

2.3 逆映射

$f: X \rightarrow Y$ 對射也。設 $y = f(x) = f(x')$ 即有 $(x, y) \in f \wedge (x', y) \in f$ 。單射故 $x = x'$ 。考慮其逆關係 $f^{-1} \subseteq Y \times X$ ：

$$(y, x) \in f^{-1} \wedge (y, x') \in f^{-1} \rightarrow x = x'$$

滿射故

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, (y, x) \in f^{-1}$$

即 $Y = \text{dom } f^{-1}$ 。是故 f^{-1} 映射也。即對射之逆關係必為映射。曰 f 之**逆映射**。

命題 9 逆映射者對射也。

- 映射 $g: Y \rightarrow X$ 使 $g \circ f = \text{id}_X$ 者、曰 f 之**左逆映射**。
- 映射 $g: Y \rightarrow X$ 使 $f \circ g = \text{id}_Y$ 者、曰 f 之**右逆映射**。

命題 10 f^{-1} 左逆且右逆也。

證. 設 $y = f(x)$ 即 $(x, y) \in f$ 、有 $(y, x) \in f^{-1}$ 、即 $x = f^{-1}(y)$ 。

• 先證 f^{-1} 左逆. 即 $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$ 。

• 次證 f^{-1} 右逆. 即 $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$ ■

命題 11 f 有左逆映射則 f 單射也。

證. 設 $g: Y \rightarrow X$ 為 f 之左逆映射也. 欲證 f 單射、即證 $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$. $f(x) = f(x')$ 然則 $g(f(x)) = g(f(x'))$. 以 g 為 f 之左逆映射知 $x = x'$. ■

2.4 勢

孟子曰「權、然後知輕重；度、然後知長短。物皆然。」計集 S 其元众寡曰**勢**、記以 $|S|$. S, T 集合也、若有對射 $f: S \rightarrow T$ 、則曰二集**等勢**、記曰 $S \cong T$. 蓋以 S 度 T 而無虛盈、則勢相若也。

多使自然數為籌、比之多少, $\exists n \in \mathbb{N}$ 可使 S 與 $\mathbb{N}_{<n} := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 對射、然則謂 S 有**窮集**、勢 n 、記 $|S| = n$. 若有集 $S = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$ 、計以一、二、三、四乃知其勢 4. 有對射

$$f: S \rightarrow \mathbb{N}_{<4}$$

$$\clubsuit \mapsto 0, \diamond \mapsto 1, \heartsuit \mapsto 2, \spadesuit \mapsto 3$$

故也。

若夫莫能以自然數數者、謂之**無窮集**. 如分數集、實數集等. $|\mathbb{N}|$ 定為 $\aleph_0$. 集合與自然數集勢等者、謂曰**可數集**、否則曰**不可數集**. 如分數集為可數集、實數集為不可數集. 有窮集之勢自然數、且 $|\emptyset| = 0$. 無窮集者、雖不可勝數、猶可較也. 集可使其元對射於自然數者、若盡數自然數之勢然。

例 3 (自然數之等勢)

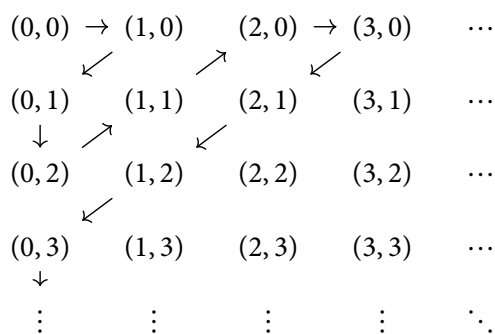
以下集合可數無窮:

• $[\mathbb{N}_*]$ —— 正自然數

易可驗證 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_*, n \mapsto n+1$ 對射、故 $|\mathbb{N}_*| = \aleph_0$.

• $[\mathbb{N}^n]$ —— 自然數組

Cantor 折線法. 列 $\mathbb{N}^2$ 所有為無窮矩陣、後沿折線以自然數編號、得對射 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ 也。



于是凡自然數 n 、 $\mathbb{N}^n$ 皆可數也。若 $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ 、對應 $(a, (b, c)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^2$ 也。以此類推。

• 【 $2\mathbb{N}$ —— 偶數】

$f(n) = 2n$ 者 $\mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ 之對射也。奇數亦然。進一步 $\mathbb{N}/n\mathbb{N}$ 之任意非空子集可數無窮也。

• 【 $\mathbb{Z}$ —— 整數】

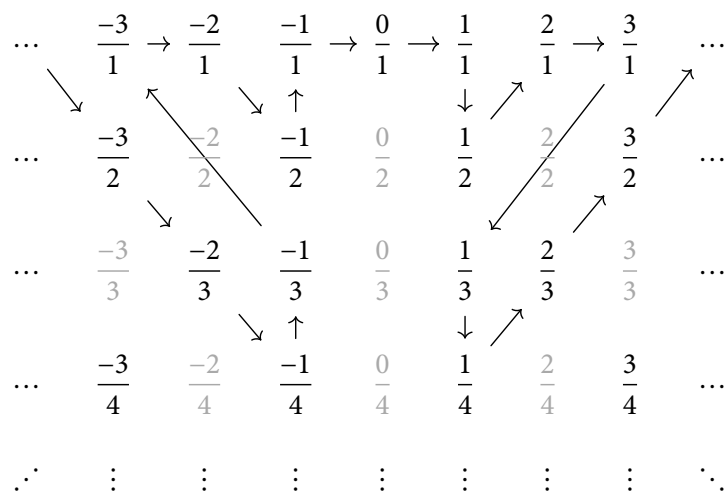
整數集也。設 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} -2n - 1 & \text{若 } n < 0 \\ 2n & \text{若 } n \geq 0 \end{cases}$$

是映正數悉於偶數而負數悉映於奇數也。

• 【 $\mathbb{Q}$ —— 分數】

分數集也。依其所謂、 $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ 故而可列下表。



依上圖折線、可編號所有真分數。

命題 12 (Schroder-Bernstein 定理) S, T 皆集也。

$$|S| \leq |T| \wedge |T| \leq |S| \rightarrow |S| = |T|$$

證. 設 $f: S \rightarrow T$ 與 $g: T \rightarrow S$ 皆單射也. 欲證 $|S| = |T|$ 、即證有對射 $h: S \rightarrow T$ 也. 設

$$S_n := \begin{cases} S \setminus g[T] & \text{若 } n = 0 \\ g \circ f[S_{n-1}] & \text{若 } n > 0 \end{cases}$$

S_0 之元莫有 g 之像也. 而 $S_1, S_2, \dots$ 之屬、俱可緣溯至 S_0 . 故集 S 之元之源自 S 者設以為 $\mathcal{S}_S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$. 設 $\mathcal{T}_S := f[\mathcal{S}_S]$ 、 T 之元之源自 S 者也. $\mathcal{S}_S, \mathcal{S}_T$ 不相交. 蓋 $s \in \mathcal{S}_S$ 源自 S 而非 T 故也. 設

$$h: S \rightarrow T = \begin{cases} f & \text{若 } s \in \mathcal{S}_S \\ g^{-1} & \text{若 } s \in S \setminus \mathcal{S}_S \end{cases}$$

則 h 對射也. 何故?

- (1) f 單射而 $f|_{\mathcal{S}_S}$ 自然也. 反之、 $f|_{\mathcal{S}_S}: \mathcal{S}_S \rightarrow \mathcal{T}_S$ 滿射也. 以 $\mathcal{T}_S = f[\mathcal{S}_S] = \text{im } f|_{\mathcal{S}_S}$ 較然可知. 於是 $f|_{\mathcal{S}_S}$ 對射也.
- (2) 同理以知 $g|_{T \setminus \mathcal{T}_S}$ 單射. 而

$$g[T \setminus \mathcal{T}_S] = S \setminus \mathcal{S}_S$$

然則可以命題 8 知 $g|_{T \setminus \mathcal{T}_S}: T \setminus \mathcal{T}_S \rightarrow S \setminus \mathcal{S}_S$ 滿射也. 所以然者、蓋

- 凡 $s \in S \setminus \mathcal{S}_S$ 者、 $s \notin S_0$. 是以 $s \in g[T] \rightarrow (\exists t \in T) g(t) = s$. 是唯需證 $t \notin \mathcal{T}_S$. 若 $t \in \mathcal{T}_S$ 、則 $(\exists s' \in \mathcal{S}_S) f(s') = t$. 則 $s = g(t) = g(f(s'))$ 即 $(\exists n \in \mathbb{N}_+) s \in S_n \subseteq \mathcal{S}_S$. 謬也. 故 $t \notin \mathcal{T}_S \rightarrow t \in T \setminus \mathcal{T}_S \rightarrow s = g(t) \in g[T \setminus \mathcal{T}_S]$.
- 反之、凡 $s \in g[T \setminus \mathcal{T}_S]$ 、則 $\exists t \in T \setminus \mathcal{T}_S, g(t) = s$. 是唯需證 $s \notin \mathcal{S}_S$. 若 $s \in \mathcal{S}_S$ 、則 $(\exists n \in \mathbb{N}_+) s \in S_n$. 繼而 $(\exists s' \in \mathcal{S}_S) g(f(s')) = s$ 、因 g 單射、 $t = f(s') \in \mathcal{T}_S$. 謬也. 故 $s \in S \setminus \mathcal{S}_S$.

是以 h 對射也. 所證如是. ■

命題 13 (Cantor's 定理) S 集也.

$$|S| < |\mathcal{P}(S)|$$

證. $f: S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ 以為映射. 欲證 f 非對射也、蓋則 $|S| \leq |\mathcal{P}(S)|$. 設

$$T := \{s \in S \mid s \notin f(s)\}$$

則 $T \subseteq S$ 故 $T \in \mathcal{P}(S)$. 欲證 T 非 f 之像也、蓋則 f 非對射也. 假 $\exists t \in S, f(t) = T$. 則

- (1) 若 $t \in T$ 、則 $t \notin f(t) = T$. 謬也.
- (2) 若 $t \notin T$ 、則 $t \in f(t) = T$. 謬也.

所證如是. ■

可數集 S 之冪集 $\mathcal{P}(S)$ 尤勢 $2^{|S|}$ 也、請以歸納法證明之: $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1$, 若設以 $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$, 既添新元 x 於 S 、其冪集必含原 $\mathcal{P}(S)$ 所有. $\mathcal{P}(S \cup \{x\})$ 之所添乃 x 與原 $\mathcal{P}(S)$ 所有之併也.

$$\mathcal{P}(S \cup \{x\}) = \mathcal{P}(S) \sqcup \{Y \cup \{x\} \mid Y \in \mathcal{P}(S)\}$$

是以

$$\begin{aligned}
2^{|\mathcal{S} \cup \{x\}|} &= |\mathcal{P}(\mathcal{S} \cup \{x\})| \\
&= |\mathcal{P}(\mathcal{S})| + |\{Y \cup \{x\} \mid Y \in \mathcal{P}(\mathcal{S})\}| \\
&= 2^{|\mathcal{S}|} + 2^{|\mathcal{S}|} = 2^{|\mathcal{S}|+1}
\end{aligned}$$

所證如是.

2.5 數列

命題 14 有序列 $\{a_n\}$ 單調遞減而 $\{b_n\}$ 單調遞增者、且 $a_n \geq b_n$. $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $a_i \geq b_j$ 意即、 a_n 皆 b_n 之上界也、 b_n 皆 a_n 之下界也.

證. 設 $i, j \in \mathbb{N}$ 、不失一般性、分三種情況討論：

- (1) $i = j$: 由題設知 $a_i \geq b_i$ 、故 $a_i \geq b_j$.
- (2) $i < j$: 因 $\{a_n\}$ 單調遞減、故 $a_i \geq a_j$. 因 $\{b_n\}$ 單調遞增、故 $b_j \geq b_i$. 由題設 $a_j \geq b_j$ 、結合上述不等式: $a_i \geq a_j \geq b_j$
- (3) $i > j$: 因 $\{a_n\}$ 單調遞減、故 $a_j \geq a_i$. 因 $\{b_n\}$ 單調遞增、故 $b_i \geq b_j$. 由題設 $a_i \geq b_i$ 、結合上述不等式: $a_i \geq b_i \geq b_j$

綜上所述、 $\forall i, j \in \mathbb{N}$ 、恆有 $a_i \geq b_j$.

因此、任意 a_i 皆為序列 $\{b_n\}$ 之上界、任意 b_j 皆為序列 $\{a_n\}$ 之下界. ■

2.5 引據

KURATOWSKI, Casimir, 1921. Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles.

Fundamenta mathematicae. Online. 1921. Vol. 2, no. 1, p. 161–171. DOI [10.4064/fm-2-1-161-171](https://doi.org/10.4064/fm-2-1-161-171).

ZERMELO, E., 1908. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. Mathematische Annalen. Online. 1 六月 1908. Vol. 65, no. 2, p. 261–281. DOI [10.1007/BF01449999](https://doi.org/10.1007/BF01449999).